

Arytmetyka finansowa dla studentów wydziałów inżynierskich Politechniki Łódzkiej. Doświadczenia po dwóch latach prowadzenia przedmiotu

Renata Długosz, Monika Lindner

Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki Politechniki Łódzkiej

Abstract

W prezentacji podzielimy się doświadczeniem z dwóch lat prowadzenia przedmiotu „Arytmetyka finansowa” dla studentów wybranych kierunków na Wydziale Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska Politechniki Łódzkiej. Przedstawimy trudności i pomysły na ich przezwyciężenie, przede wszystkim w kontekście pracy zdalnej. Podamy również, w jaki sposób motywowałyśmy studentów pokolenia Z (ery cyfrowej) do aktywnego udziału w procesie zdalnego uczenia się. Omówimy, jak wnioski wyciągnięte z dotychczasowego doświadczenia przy wymuszonej pracy zdalnej mogą posłużyć do nauczania tego przedmiotu w trybie stacjonarnym.

1 Wprowadzenie

Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska Politechniki Łódzkiej kształci studentów na czterech kierunkach: Architektura, Budownictwo, Sieci i instalacje w inżynierii środowiska (od 2021 roku Inżynieria środowiska w budownictwie) oraz Planowanie przestrzenne. Wydziałowi zależy na kształceniu specjalistów, którzy bez problemów znajdą wymarzoną pracę lub założą własną firmę i będą bezkonkurencyjni w swojej dziedzinie. Uczelnia od wielu lat analizując sytuację gospodarczą, rynek pracy oraz oczekiwania studentów, stara się dostosować swoją ofertę do oczekiwań zarówno studentów jak i pracodawców. Zespół ekspertów tworzących programy z matematyki od roku 2019 dla I i II semestru studiów I-go stopnia zaproponował dla uczelni szeroki wybór modułów. Wśród nich znalazła się Matematyka ekonomiczna (jako moduł 20) oraz Statystyka (jako moduł 9). Według danych zebranych z ankiet z biura karier Politechniki Łódzkiej z ostatnich 5 lat średnio 55% absolwentów uczelni chce za-

łożyć w przyszłości własną firmę. Ankiety wypełniane są drogą elektroniczną i zbierane przez Elektroniczny System Badania Losów Zawodowych Absolwentów Politechniki Łódzkiej. Dane szczegółowo podaje tabela:

Rok	Liczba absolwentów zarejestrowanych ogółem	liczba wypełnionych ankiet	Absolwenci chcący założyć działalność gospodarczą liczbowo (procentowo)
2020	1980	1523	838 (55%)
2019	2217	1656	923 (56%)
2018	2353	1863	991 (53%)
2017	2412	1917	1090 (57%)
2016	2341	1901	1070 (56%)

Studenci w ankietach deklarowali między innymi otwarcie biur architektonicznych, geodezyjnych i konstrukcyjnych. Stąd też władze kierunku Sieci i Instalacje w Inżynierii Środowiska oraz Planowania Przestrzennego postawiły od 2020 roku w semestrze II na Statystykę i Arytmetykę Finansową (wcześniej Matematyka Finansowa na Politechnice Łódzkiej była wykładana tylko na kierunku Matematyka Stosowana oraz na Wydziale Zarządzania i Inżynierii Produkcji), by absolwenci tych kierunków na początku kariery zawodowej byli dobrze przygotowani do prowadzenia swojej działalności gospodarczej i nie musieli zatrudniać (przynajmniej na początek) doradców finansowych. Ale również po to, by studenci inwestując pieniądze albo planując w przyszłości zaciągnąć kredyt lub pożyczkę, mogli podejmować najlepsze decyzje. Oba przedmioty są ze sobą powiązane, ponieważ zmienna losowa jest ważnym narzędziem przy wycenie instrumentów finansowych, szczególnie instrumentów pochodnych (patrz np. [1]).

Przejdźmy do doświadczeń po dwóch latach prowadzenia po raz pierwszy Arytmetyki Finansowej na obu wcześniej wspomnianych kierunkach.

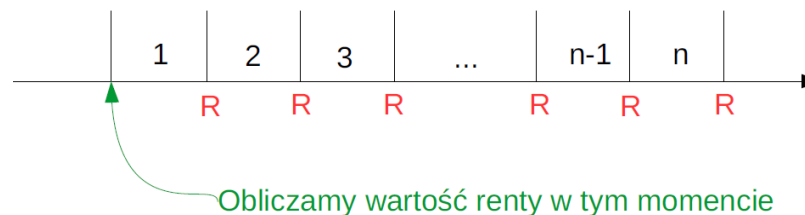
Organizacja przedmiotu

Przedmiot był realizowany w formie wykładu i ćwiczeń. Ze względu na to, że na wykład przeznaczono, na obu kierunkach, tylko 45 minut tygodniowo, nacisk kładliśmy głównie na zastosowania, a teoria była prezentowana na wykładzie w minimalnym zakresie koniecznym do rozumienia i budowy modeli. Ćwiczenia poświęcone były rozwiązywaniu zadań i problemów. Zgodnie z efektami uczenia się dla kierunku studiów pierwszego stopnia Sieci i instalacje w inżynierii środowiska (patrz [5]) realizowane były następujące treści programowe: teoria oprocentowania, obliczanie wartości obecnej i przyszłej strumieni pieniężnych, wyznaczanie stopy nominalnej, stopy efektywnej, stopy dyskontowej, równoważnych stóp procentowych i dyskontowych, obliczanie czasu trwania lokaty przy różnych rodzajach oprocentowania (prostym, składanym, ciągłym), renty kapitałowe, obliczanie wartości obecnej i skumulowanej, obliczanie wysokości raty, wyznaczanie czasu trwania różnych rodzajów rent kapitałowych, spłata pożyczek i kredytów. Wyznaczanie wysokości raty kapitału, obliczanie raty odsetek i bieżącego długu, całkowitego oprocentowania oraz kosztu kredytu przy różnych metodach jego spłaty. Wycena obligacji, obliczanie kwoty kuponu, wycena akcji, obliczanie ceny akcji o stałych dywidendach. Obliczanie ceny akcji o zmiennych dywidendach. Na kierunku Planowanie Przestrzenne z uwagi, na to, że była tylko jedna godzina ćwiczeń tygodniowo treści programowe nie zawierały akcji i obligacji. Szacunkowa całkowita liczba godzin, które student powinien był przeznaczyć na osiągnięcie zdefiniowanych dla przedmiotu efektów uczenia się, wynosiła około 35 godzin. Wykład najczęściej rozpoczynał się od przedstawienia teorii, kolejno omawiane były stosowane metody i wzory. Mnogość wzorów pojawiających się na wykładzie przerażała studentów, stąd dla ich prawidłowego zrozumienia podawane były liczne przykłady, również w Excelu, pokazujące praktyczne sposoby wykorzystania omawianej problematyki.

Po zajęciach synchronicznych wykład był udostępniany w formie pdf na platformie zdalnego nauczania. Cyklicznie umieszczane były również arkusze zadań. Zadania były rozwiązywane wspólnie przez studentów w trakcie ćwiczeń oraz samodzielnie. Studenci zainteresowani omawianą problematyką mogli poszerzyć swoje wiadomości korzystając z konsultacji, podręczników do Matematyki Finansowej a także Internetu. W celu ujednolicenia terminologii i oznaczeń na wykładzie podana została literatura [2] i [3].

Oba kursy w trakcie pandemii

W marcu 2020 roku rozpoczął się semestr, w którym po raz pierwszy miałyśmy poprowadzić zajęcia z Arytmetyki finansowej na obu kierunkach. Zaplanowane metody i formy pracy ze studentami pokrzyżowało wejście zdalnego nauczania. Już trzeci wykład odbył się synchronicznie w trybie zdalnym w formie webinarium, ćwiczenia zaś na Teams lub w Webpokojach. Doświadczenia z pierwszego kursu opisałyśmy w artykule [4]. Niestety kolejny kurs z Matematyki finansowej również odbył się zdalnie. Korzystając z doświadczeń po pierwszym kursie, do drugiego mogłyśmy się lepiej przygotować. Przede wszystkim miałyśmy bardzo dobrze opanowane platformy do nauczania zdalnego. W poprzednim roku większość zadań już rozwiązanych udostępniałyśmy i omawiałyśmy rozwiązania podczas ćwiczeń. W tym- na platformie Teams każdy student miał dostęp do edytowalnej tablicy i to studenci rozwiązywali zadania na forum. Ponieważ dysponowałyśmy już wieloma materiałami dydaktycznymi w formie pdf, wystarczyło je ulepszać. Tu pomocna była opinia studentów z poprzedniego kursu. Zagadnienia związane z wpłatami „z dołu” lub „z góry”, zgodnych z okresem kapitalizacji lub nie, rentami, planami spłaty długu czy obliczenia dotyczące dyskontowania weksli tłumaczyłyśmy z wykorzystaniem osi czasu.



Od pierwszych zajęć kładliśmy nacisk na znaczenie czasu w ocenie efektywności inwestycji. Sporządzanie osi czasu praktycznie przy każdym zadaniu, ułatwiało zrozumienie treści zadania i jego rozwiązanie.

Metody nauczania i formy pracy

Według nas nauczanie zdalne jest skuteczne, gdy jest synchroniczne oraz zarówno nauczyciel i student w równym stopniu zainteresowani są osiągnięciem wyznaczonych zadań programowych. Jeżeli student nie bierze świadomego i aktywnego udziału w procesie nauczania, to następstwem tego jest brak zrozumienia przedmiotu. Student niezdający sobie sprawy z celu poszczególnych rozważań

matematycznych uczy się mechanicznego wykonania pewnych działań. Takie postępowanie prowadzi do tego, że student może opanować w większym lub mniejszym stopniu wykładany materiał bez świadomości celu i sensu działań [6]. Chcąc temu zapobiec musieliśmy trafnie wybrać odpowiednie metody nauczania, zwłaszcza w kontekście pracy zdalnej. A ponieważ jedną z zalet pracy zdalnej był fakt, że uczestnicy domyślnie siedzieli przy komputerach z dostępem do Excela, wybrane zajęcia można było prowadzić metodą praktyczną z wykorzystaniem arkusza kalkulacyjnego. Z jednej strony pozwalało to na przeprowadzanie rachunków w rzeczywistej skali. (Na przykład plan spłaty długu rozpisany na 5 lat. Korzystając z kredy i tablicy ograniczylibyśmy się raczej do rozliczenia kilku pierwszych rat.) Z drugiej strony wiele zadań można było rozwiązać na wiele sposobów. Przykładowo zadanie *Podać obecną wartość renty złożonej z ośmiu płatności po 200 zł płatnych na koniec każdego miesiąca, przy miesięcznej efektywnej stopie procentowej wynoszącej 0,3%* można było:

1. Rozwiązać wprost ze wzoru podanego i wyprowadzonego na wykładzie :

$$A = R \frac{1 - v^n}{i} = Ra_{\overline{n}|i}$$

2. Rozwiązać siłowo przy użyciu Excela poprzez zdyskontowanie kolejnych płatności do chwili obecnej i zsumowanie wyników:

	nr	rata	zdyskontowana
stopa 0,003	1	200	199,4017946
	2	200	198,8053785
	3	200	198,2107462
wsp. dyskontujący 0,997008973	4	200	197,6178926
	5	200	197,0268121
	6	200	196,4374996
	7	200	195,8499498
	8	200	195,2641573
SUMA			1578,61

3. Rozwiązać korzystając z gotowej funkcji Excela:

wywołanie		
f _x	=PV(0,003;8;-200)	
	E	F

Fakt, że trzy sposoby dają ten sam wynik jest bardziej przekonujący dla studentów niż wyprowadzenie wzoru w oparciu o sumę ciągu geometrycznego i daje im pewną satysfakcję. Korzystanie z Excela podczas zajęć przynosiło wiele korzyści:

1. Studenci uzyskiwali takie same wyniki, a nie podobne jak przy użyciu kalkulatora.
2. Zwiększyła się liczba zadań rozwiązywanych na zajęciach. I tak np. zamiast 5 zadań rozwiązanych podczas jednego spotkania w ubiegłym roku dotyczącego kredytów krótkoterminowych, w tym roku takich zadań z użyciem arkusza kalkulacyjnego rozwiązano 8, w tym niektóre z podpunktami. Poniżej podajemy przykładowe zadanie:

Zadanie 2
Kredyt w wysokości 87000zł ma być spłacony w ciągu 3 lat pod koniec każdego roku z e.s.p $i=6,5\%$. Podaj plan spłaty długu dla:
a) płatności malejących (równych rat kapitałowych)
b) równych płatności (równe raty kapitałowo-odsetkowe)

Rozwiązanie a)

s	87000					
i	6,50%					
k	29000					
Nr	S _{n-1}	Odsetki In	Rata całkowita Pn	Rata kapitałowa Kn	Zadłużenie Sn	
1	87000,00	5655	34655	29000	58000,00	
2	58000,00	3770	32770	29000	29000,00	
3	29000,00	1885	30885	29000	0,00	
RAZEM		11310	98310	87000		

Rozwiązanie b)
Obliczamy ile powinna wynosić taka rata. Dług 87000 traktujemy jak wartość obecną A renty o stałych płatnościach płatnej z dołu przy stopie i
v = 0,938967 $R=(87000 \cdot i) \cdot (1-v)^{-3} = 32849,08607$

Nr	S _{n-1}	Odsetki In	Rata całkowita Pn	Rata kapitałowa Kn	Zadłużenie Sn
1	87000,00	5655,00	32849,09	27194,09	59805,91
2	59805,91	3887,38	32849,09	28961,70	30844,21
3	30844,21	2004,87	32849,09	30844,21	0,00
RAZEM		11547,26	98547,26	87000,00	

3. Studenci poznali i stosowali między innymi funkcje finansowe w Excelu takie jak:

- FV, która oblicza wartość przyszłą inwestycji przy założeniu stałych płatności (rata), danej wartości aktualnej i stałej stopie procentowej (stopa).
- PV, która oblicza wartość bieżącą inwestycji, która jest całkowitą sumą bieżącej wartości szeregu przyszłych płatności (całkowita obecna wartość przyszłych płatności).

- PMT, która oblicza ratę w zależności od stopy, okresu spłaty, wysokości inwestycji.
- RATE, która oblicza wielkość stopy procentowej.
- IRR, która oblicza wewnętrzną stopę zwrotu z inwestycji

Prowadząc zajęcia starałyśmy się przynajmniej część problemów zakotwiczyć w doświadczeniu słuchaczy. W szczególności liczyliśmy RRSO dla kredytów konsumenckich oraz obliczaliśmy wartość netto inwestycji (NPV) dla przykładowych startupów, które studenci mogliby założyć. W tym ostatnim przypadku trudnością dla uczniów okazało się pojęcie oczekiwanej stopy zwrotu. Nie pomagała tu aktualna sytuacja ekonomiczna – obecnie stopy procentowe są ogólnie rekordowo niskie (a w pewnych sytuacjach – ujemne), co sprawia, że część zadań w nowych dekoracjach wychodzi mało spektakularnie. Chcąc prowadzić zajęcia blisko aktualnego doświadczenia zamierzamy w przyszłym roku większy nacisk położyć na wpływ inflacji na inwestycje kapitałowe.

Inną formą aktywizacji studentów była praca metodą projektu dotyczącego obliczania NPV (wartości obecnej netto). Wybór projektu nie był przypadkowy. Wartość bieżąca netto (NPV) jest metodą dynamiczną służącą ocenie efektywności ekonomicznej inwestycji a więc bardzo przydatna przy prowadzeniu własnej działalności gospodarczej. Studenci w maksymalnie trzyosobowych grupach mieli za zadanie zaprojektować hipotetyczną inwestycję, która miałaby być realizowana przez co najmniej 5 okresów. Nakłady inwestycyjne, stopa dyskonta oraz strumienie przychodów pieniężnych miały być dowolne (ale realistyczne). Dodatkowym zadaniem było podsumowanie opłacalności inwestycji oraz sformułowanie wniosków dotyczących ulepszenia projektu. Praca metodą projektu to strategia dydaktyczna, która łączy w sobie wiele technik, dlatego kalkulacje miały być przeprowadzone ręcznie oraz w arkuszu kalkulacyjnym Excel. Oprócz przygotowania w wersji pisemnej studenci musieli projekty zaprezentować na zajęciach. Projekt nie był bardzo skomplikowany, dlatego studenci na przygotowanie mieli tydzień. Projekt w tym semestrze potraktowałyśmy jako próbę do włączenia tej formy pracy ze studentami jako stałego elementu nauczania na tym przedmiocie. Dlatego w tym roku był tylko dla chętnych studentów. Motywacją do udziału w projekcie było podwyższenie o jeden stopień oceny z zadania dotyczącego obliczania NPV. Projekty przygotowała i omówiła jedna czwarta studentów roku. Studenci zaproponowali szereg różnych inwestycji. Rozważali różne warianty kredytów, przy różnej wymaganej stopie zwrotu z uwzględnieniem inflacji lub bez. W ten sposób przekazali pozostałym studentom dużo praktycznej wiedzy. Zajęcia, na których omawiane były projekty okazały się bardzo ciekawe, wyćwiczone zostały umiejętności obliczania NPV (również w Excelu) i przede wszystkim efektywnie utrwalone, co pokazały wyniki kolokwium.

Porównanie weryfikacji

Przejdźmy do weryfikacji efektów uczenia się. Okazała się ona najsłabszym elementem zdalnego nauczania po pierwszym roku (patrz [4]). Przypomnijmy, że w roku akademickim 19/20 wszystkie kolokwia przeprowadziłyśmy na koniec semestru w formie testu na platformie Wikamp. Zgodnie z warunkami uzyskania zaliczenia zajęć, zamieszczonymi w Karcie warunków realizacji przedmiotu dla obu kierunków [5], studenci musieli otrzymać pozytywne oceny z każdego z zadań na kolokwium. Studenci mieli do rozwiązania razem 6 zadań wielokrotnego wyboru i mogli rozwiązywać w zależności od stopnia trudności: na ocenę 3 zadania łatwiejsze z podpunktu a oraz na wyższą oceną- z podpunktu b. Ponieważ na przygotowanie testów wszystkich terminów zaliczeń miałyśmy mało czasu a taka forma sprawdzania wiedzy była dla nas nowością, zadania były mało rozbudowane technicznie.

W bieżącym roku akademickim wiadomo było od samego początku, w jaki sposób sprawdzana będzie wiedza studentów, dlatego mogłyśmy systematycznie rozbudowywać bazę zadań testowych. Tym razem do każdego testu (zadania) przygotowałyśmy już po kilkanaście zadań bardziej rozbudowanych technicznie. (zadania z podpunktów b zawierały po kilkanaście odpowiedzi). Prawdopodobieństwo powtórzenia się zadania u studentów zmniejszyło się znacząco. Czy i jak to wpłynęło na wyniki zaliczenia testów? Czy na podstawie zestawienia procentowego zaliczenia przez studentów poszczególnych zadań w pierwszym terminie dla obu kursów można wyciągnąć jakieś wnioski? Przyjrzyjmy się poniższej tabeli.

Numer zadania	Wyniki zaliczenia rok 19/20	Wyniki zaliczenia rok 20/21
Zadanie 1	91 %	86 %
Zadanie 2	64 %	72 %
Zadanie 3	77 %	72 %
Zadanie 4	73 %	59 %
Zadanie 5	68 %	78 %
Zadanie 6	64 %	84 %

Trudno odpowiedzieć na powyższe pytania, gdy do końca nie jesteśmy prako-

nane o samodzielności w rozwiązywaniu zadań. Nawet przydział studentów do kilku wirtualnych pokoi, w których pisali kolokwia przy włączonych kamerkach pod naszą obserwacją, nie daje 100% naszej pewności ich uczciwości.

Wnioski do dalszej pracy

W dzisiejszych czasach studenci mają coraz wyższe wymagania względem zajęć. Stąd - my nauczyciele musimy aktualizować swoją wiedzę oraz sposoby jej przekazywania z wykorzystaniem nowoczesnych metod nauczania, w szczególności nowoczesnych technologii, które spełnią oczekiwania studentów. W następnych kursach z Arytmetyki finansowej będziemy nadal:

- realizować treści programowe podczas zajęć (wykłady i ćwiczenia) oraz poprzez samodzielne prace własne studentów,
- rozwiązywać zadania z użyciem arkusza kalkulacyjnego,
- do tematów lub zagadnień realizowanych przez studentów w ramach pracy samodzielnej podawać wskazówki dotyczące tematu, treści zadań, problemów lub projektów, odnośniki do literatury, artykuły, opracowania,
- w miarę możliwości czasowych organizować odpowiedzi na pytania oraz dyskusje na interesujące studentów tematy lub problemy.

oraz postaramy się:

- zwiększać liczbę samodzielnych krótkich projektów w tym *case study*,
- angażować wszystkich studentów do udziału w projektach, dlatego do oceny końcowej z ćwiczeń brać oceny z wagami odpowiednio: z kolokwium z 70% z obowiązkowego projektu 20% oraz za aktywność 10%.

Literatura

1. J. Grala-Michalak, Stochastyczne metody matematyki finansowej w zadaniach, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2016.
2. S.G.Kellison : The theory of interest, Second Edition 1991.
3. K. Jajuga K., T.Jajuga .: Inwestycje; PWN, Warszawa, 2006.
4. R. Długosz, M. Lindner Zwycięstwo technik synchronicznych, Forum Akademickie 9/2020.
5. <https://programy.p.lodz.pl>
6. B. Rabijewska, Wprowadzenie do wybranych zagadnień dydaktyki matematyki, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 1980.